MINISTÈRE
DE L'EUROPE
ET DES AFFAIRES
ÉTRANGÈRES

Liberté
Égalité
Fraternité

DIRECTION GENERALE DE L'ADMINISTRATION
ET DE LA MODERNISATION

DIRECTION DES RESSOURCES HUMAINES

SOUS-DIRECTION DE LA POLITIQUE DES RESSOURCES HUMAINES

BUREAU DES CONCOURS ET EXAMENS PROFESSIONNELS

CONCOURS INTERNE ET EXTERNE POUR L'ACCÈS À L'EMPLOI D'ATTACHÉ DES SYSTÈMES D'INFORMATION ET DE COMMUNICATION AU TITRE DE L'ANNÉE 2023

ÉPREUVES ÉCRITES D'ADMISSIBILITÉ

MERCREDI 15 FEVRIER 2023

MATHÉMATIQUES

Composition de mathématiques appliquées à l'informatique pouvant comporter des exercices, des questions sur le programme et des problèmes à résoudre.

Durée de l'épreuve : 2 heures
Coefficient : 2

SUJET

Voir pages suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Ce dossier comporte 16 pages (page de garde non comprise).

Préambule :

Cette épreuve de mathématiques vise à vérifier vos connaissances, votre capacité d'analyse, et vos compétences d'adaptation face à différentes situations ou simulations. Tous les concepts mathématiques nécessaires pour réaliser ce sujet ainsi que des abaques vous sont fournis en annexe.

Toutes vos réponses devront être justifiées sauf quand l'énoncé indique clairement le contraire.

L'orthographe, le soin et la présentation apportés à votre copie seront pris en compte (0,75 point).

Le barème est transmis pour chaque exercice. Il est proportionnel au temps nécessaire estimé pour le résoudre.

Exercice 1 : Comptez-vous ! (2 points)

En tant que responsable d'équipe, vous supervisez le recrutement d'une nouvelle personne pour un poste d'ingénieur(e) informatique. Vous constatez les données suivantes à propos des candidates et candidats selon leur sexe, leur lieu d'habitation actuel, leur âge et leur appartenance à votre organisation.

SEXE	INTERNES	EXTERNES
Hommes	36	64
Femmes	9	51

LIEU	INTERNES	EXTERNES
France	33	112
Étranger	12	3

	20 - 29		30 - 39		40 - 49		50 - 65	
	NOMBRE	ÂGE MOYEN	NOMBRE	ÂGE MOYEN	NOMBRE	ÂGE MOYEN	NOMBRE	ÂGE MOYEN
Internes	6	28	16	36	15	42	8	57
Externes	45	24	34	33	27	46	9	54

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Il ne vous est pas demandé de justifier vos réponses.

Chaque bonne réponse rapporte 0,25 point. Chaque mauvaise réponse vous fait perdre 0,25 point. Une absence de réponse ne vous fait pas perdre de point (elle vaut 0 point). Le total pourra être négatif.

N°	QUESTION	A	B	C	D
1.1.	Le nombre total de candidates et candidats est de :	150	152	160	168
1.2.	La proportion de candidates est de :	25,0 %	33,3 %	37,5 %	60,0 %
1.3.	L'âge moyen global des candidat(e)s est de … ans :	36,0	37,7	38,1	41,7
1.4.	L'âge médian global des candidat(e)s est de … ans :	27	34	42	54
1.5.	Il y a … fois plus de candidat(e)s habitant en France que de candidat(e)s habitant à l'étranger :	8	9	10	11
1.6.	Les candidat(e)s de 50 ans et plus correspondent au :	1er décile	1er quart	3ème quart	dernier décile
1.7.	La probabilité qu'un(e) candidat(e) soit interne et âgé(e) de moins de 30 ans ou plus 49 ans est de :	8,75 %	10,9 %	34,4 %	42,7 %
1.8.	Le ratio entre internes et externes est de :	$\frac{9}{60}$	$\frac{9}{45}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{23}$

<u>Exercice 2 :</u> Déchiffrez les premiers ! (3,5 points)

On s'intéresse à deux systèmes de chiffrement et de déchiffrement : le chiffrement affine et le système RSA.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I : le chiffrement affine. (1 point)

À chaque lettre de l'alphabet on associe un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

- *étape* 1 : on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25 ;
- *étape* 2 : à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus ;
- *étape* 3 : on calcule l'entier x' défini par les relations $x' \equiv p\,x + q\ [26]$ et $0 \leq x' \leq 25$;
- *étape 4* : à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

2.1.1. Compléter cette égalité : $80 \equiv \ldots [26]$.

On choisit $p = 9$ et $q = 2$.

2.1.2. Démontrer que la lettre *V* est codée par la lettre *J*.

2.1.3. On admet que $x' \equiv 9x + 2\ [26]$ équivaut à $x \equiv 3x' + 20\ [26]$. Décoder la lettre R.

Partie II : le système RSA. (2,5 points)

Le système RSA permet de chiffrer et de déchiffrer des messages.

Il se base sur le résultat arithmétique suivant que l'on admettra :

Soient p et q deux nombres premiers distincts.			
Soit d un entier naturel tel que	$1 \leq d \leq (p-1)(q-1)$	et	$PGCD(d,(p-1)(q-1)) = 1$.
Soit e un entier naturel tel que	$1 \leq e \leq (p-1)(q-1)$	et	$e\,d \equiv 1[(p-1)(q-1)]$.
Alors, pour tout entier relatif a, $a^{de} \equiv a\ [p\,q]$			

2.2.1. Donner la définition d'un nombre premier.

2.2.2. Décliner l'acronyme PGCD et donner sa définition.

On choisit les valeurs suivants : $p = 163$, $q = 359$ et $e = 5\,015$. Ainsi, $p\,q = 58\,517$.

2.2.3. Justifier que 38 903 est une solution de l'équation $5\,015\,d \equiv 1\ [57\,996]$ dans $\mathbb{Z}$.
Est-ce la seule ? On ne demande pas de justifier.

On choisit donc $d = 38\,903$.

La clé de chiffrement est donnée par la relation $C(x) \equiv x^{5015}\ [58\,517]$.

La clé de déchiffrement est donnée par la relation $D(y) \equiv y^{38\,903}\ [58\,517]$.

2.2.4. On code le mot ASIC par 09120. Un logiciel donne $09120^{5015} \equiv 36\,974\ [58\,517]$. Par quoi sera chiffré le mot ASIC ?

2.2.5. Que faire pour déchiffrer ? Ne pas faire les calculs, juste expliquer.

<u>Exercice 3 :</u> Sur grand écran. (3,25 points)

On estime que le coût des écrans 27" sur le marché diminue de 5 % par mois. Le prix moyen est actuellement estimé à 500 euros. On note u_n ($n \in \mathbb{N}$) le prix des écrans dans n mois.

Ainsi, $u_0 = 500$.

3.1. Justifier que la suite (u_n) est géométrique. On précisera sa raison.

3.2. Exprimer u_n en fonction de n.

La fonction ci-contre, écrite en langage Python, a pour paramètre un nombre k et renvoie le nombre de mois minimum au bout duquel le prix moyen des écrans est inférieur à k.

```
def Seuil(k) :
  n = 0
  u = 500
  while .................
    n = .................
    u = .................
  return n
```

3.3. Compléter cette fonction.

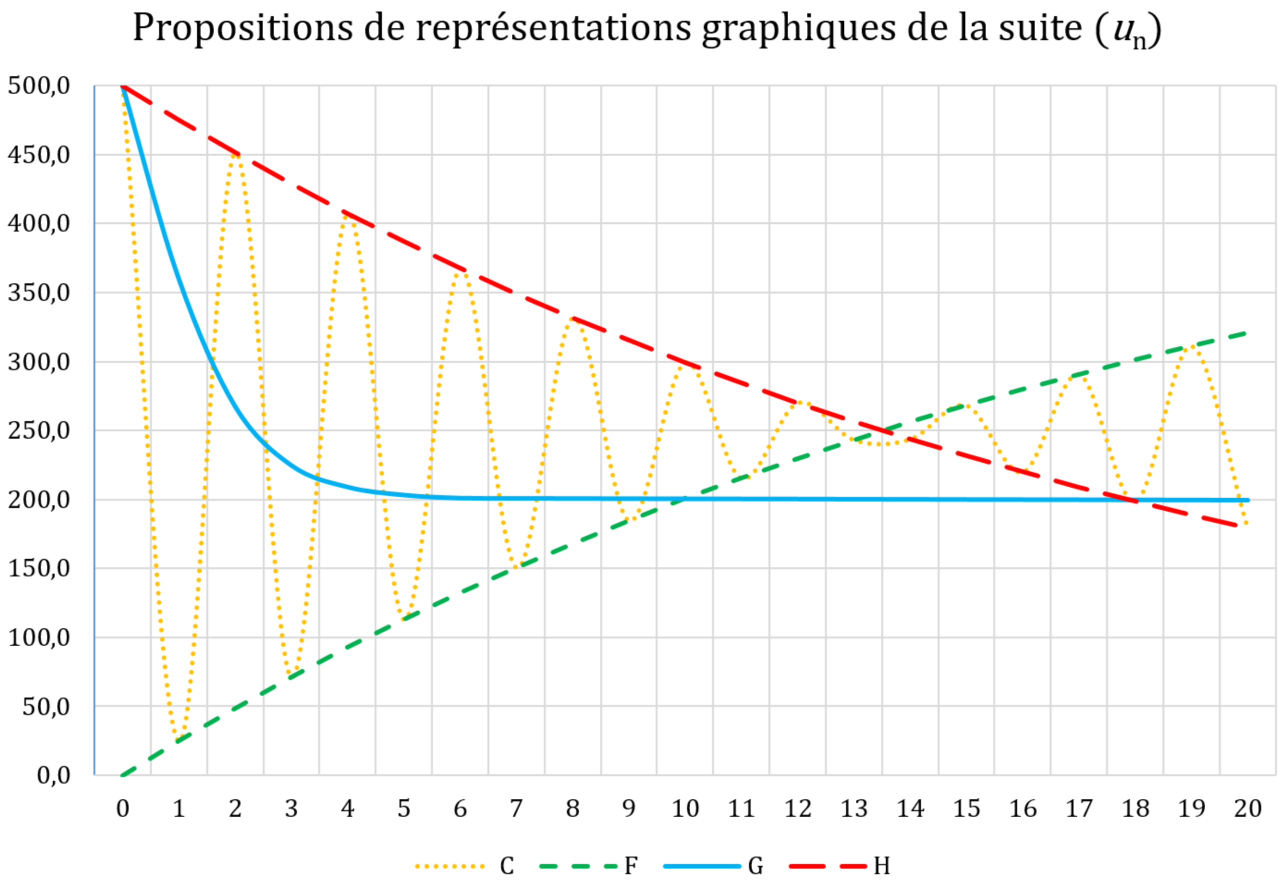
Dans la console, on a cet affichage :

```
>>> Seuil(200)
18
```

3.4. Interpréter l'affichage dans le contexte de l'exercice.

3.5. Retrouver le résultat obtenu à la question 3.4., en résolvant une inéquation.

3.6. Quatre représentations graphiques de la suite (u_n) de $n = 0$ à $n = 20$ vous sont proposées ci-dessous. Indiquer quelle courbe est la bonne.



<u>Exercice 4 :</u> TD, nombres et chiffres. (10,5 points)

Les quatre parties sont indépendantes.

Dans le cadre de la programmation du futur portail de rédaction et de consultation des télégrammes diplomatiques du ministère, vous devez proposer une preuve de concept. Afin de la rendre plus réaliste, vous souhaitez simuler un corpus représentatif de télégrammes sur la base de la production des dernières années.

<u>Note :</u> *Il est rappelé qu'une extraction de la table de probabilité de la loi normale centrée réduite est fournie en annexe.*

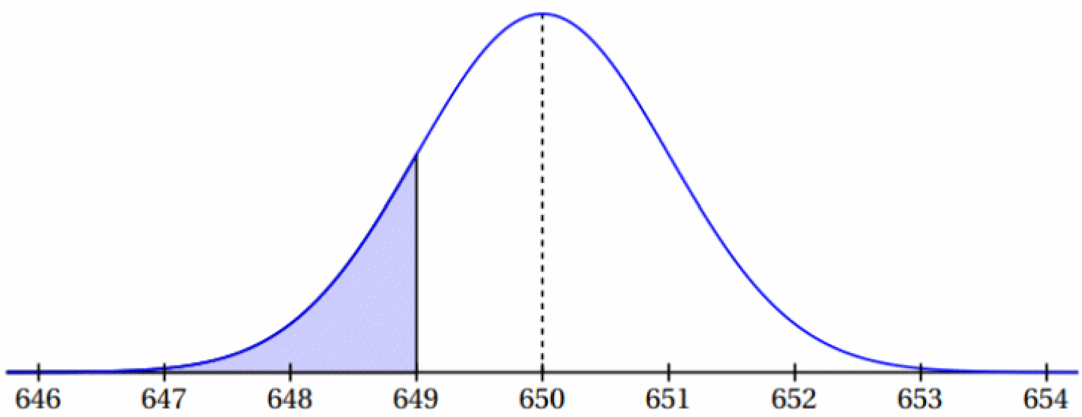
Partie I : nombre minimal de mots par télégramme diplomatique. (1,5 point)

On définit la variable aléatoire X donnant le nombre minimal de mots par télégramme diplomatique sur ces vingt dernières années.

On admet que X suit une loi normale et telle que $(X \leq 649) \approx 0{,}1587$.

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative de la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire de X.

On note respectivement μ et σ l'espérance et l'écart-type de cette loi normale.



4.1.1. En expliquant votre raisonnement, choisir la bonne proposition parmi ces quatre :

A. $P(X \leqslant 651) \approx 0{,}6587$	**B.** $P(649 \leqslant X \leqslant 651) \approx 0{,}683$
C. $\sigma = 650$	**D.** $\mu = 649$

4.1.2. Corriger les valeurs des propositions fausses et expliquez ce que représentent chacune de ces valeurs.

Partie II : nombre moyen de mots par télégramme diplomatique. (1 point)

Sur ces 20 dernières années, le nombre moyen de mots par télégramme diplomatique est de 824 avec un écart-type de 13.

On cherche à simuler ce fonctionnement en demandant au programme de simulation de générer des textes : on considère Y une variable aléatoire donnant le nombre de mots sur un télégramme.

Ainsi, Y suit une loi normale d'espérance $\mu = 824$ et d'écart-type $\sigma = 13$.

Le programme a généré un télégramme.

4.2.1. Quelle est la probabilité pour qu'il soit composé entre 800 et 830 mots ?

4.2.2. Quelle est la probabilité pour qu'il soit composé d'au plus 800 mots ?

Partie III : nombre moyen de télégrammes diplomatiques envoyés pour une période donnée. (4,25 points)

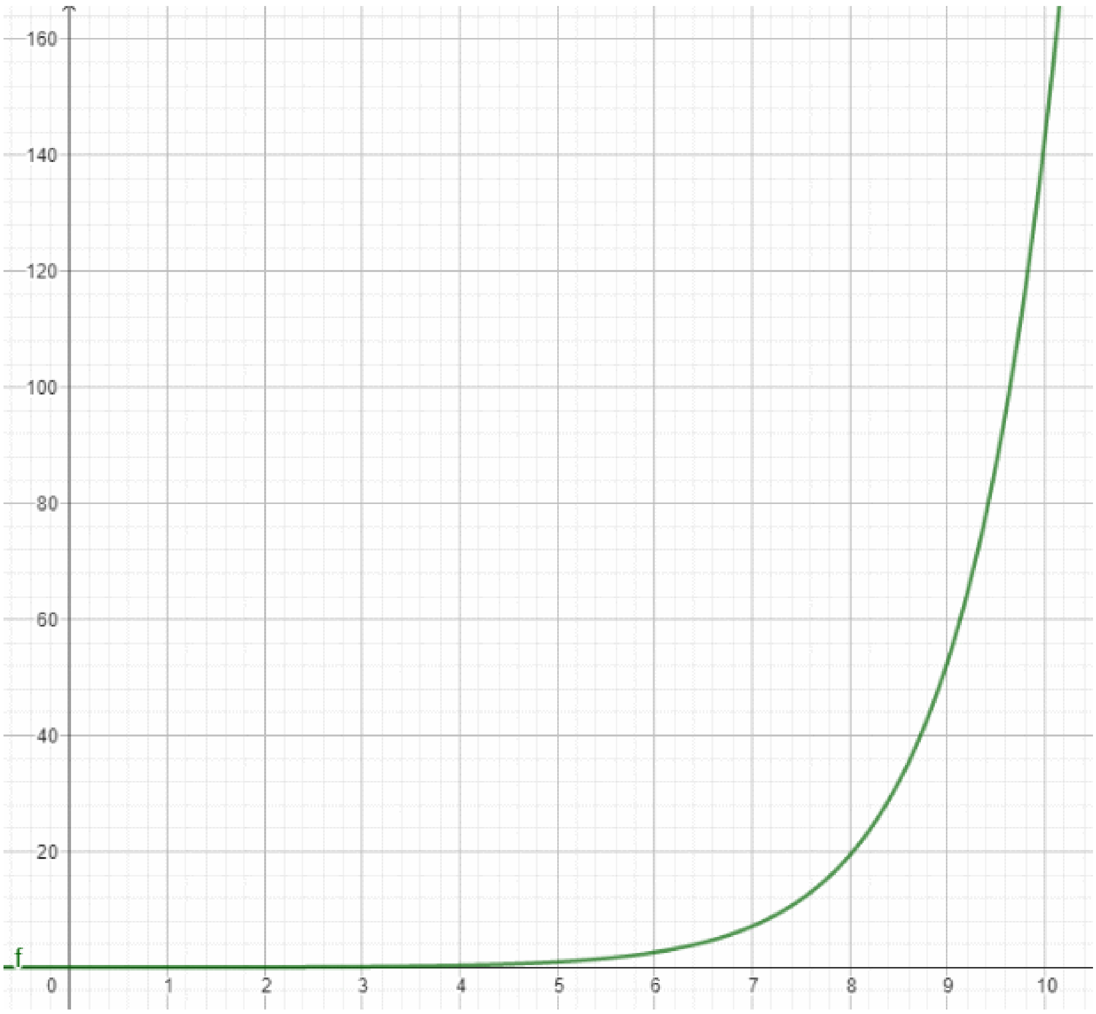
On définit la fonction cosinus hyperbolique, notée *ch*, par $ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

4.3.1. Justifier que *ch* est définie sur $\mathbb{R}^+$.

4.3.2. Démontrer que la fonction *ch* est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Vous avez démarré une première simulation de votre programme le 1er janvier 2023. Le nombre de messages simulés est modélisé par la fonction *f* définie par $f(x) = 0{,}013\ ch(x)$ avec :

- x est le numéro du jour (le 1er janvier 2023 est considéré comme le jour 0) ;
- $f(x)$ est le nombre de messages envoyés.



4.3.3. Déterminer le nombre de messages envoyés le jour numéro 10 et le jour numéro 20. On donnera les valeurs exactes ainsi qu'une valeur approchée au centième près.

4.3.4. Peut-on dire que le nombre de messages envoyés est proportionnel au numéro du jour ? On expliquera le raisonnement en donnant notamment un argument graphique.

4.3.5. Comparer :

- le nombre moyen de messages envoyés entre les jours numéro 5 et 8 ;
- le nombre moyen de messages envoyés entre les jours numéro 9 et 11.
  On expliquera la démarche (notamment avec un argument graphique) et on écriera les valeurs exactes calculées.

4.3.6. Pouvait-on prévoir la réponse à l'aide de la courbe de la fonction *f* ?

Partie IV : type de télégrammes diplomatiques produits. (3,75 points)

Deux types de télégrammes diplomatiques sont émis sur votre plate-forme de simulation : des notes diplomatiques et des messages formels.

Sur un deuxième serveur, vous avez paramétré votre programme afin qu'à partir du 1er janvier 2023, 63 % des envois soient des notes diplomatiques et les 37 % restants soient des messages formels. Vous souhaitez étudier l'évolution des deux types de télégrammes au fil du temps.

Vous avez défini qu'un service :

1. après avoir envoyé une note diplomatique, envoie ensuite une autre note diplomatique dans 89 % des cas et un message formel dans 11 % des cas ;
2. après avoir envoyé un message formel, envoie ensuite un autre message formel dans 91 % des cas et une note diplomatique dans 9 % des cas.

On suppose également que le nombre de télégrammes envoyés reste constant chaque jour.

Pour tout entier naturel *n*, on note :

- d_n la proportion de notes diplomatiques après *n* envois après le 1er janvier 2023 ;
- f_n la proportion de messages formels après *n* envois après le 1er janvier 2023.

L'état probabiliste « *n* envois » après le 1er janvier 2023 est noté $P_n = (d_n \quad f_n)$.

On a ainsi $P_0 = (0{,}63 \quad 0{,}37)$.

On rappelle que pour tout entier naturel *n*, $d_n + f_n = 1$.

4.4.1. Représenter la situation par un graphe probabiliste dans lequel on notera respectivement *D* et *F* les sommets correspondants aux deux types de télégrammes.

4.4.2. Donner la matrice de transition *M* de ce graphe, en considérant les sommets dans leur ordre alphabétique.

4.4.3. Calculer l'état probabiliste P_2.

4.4.4. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $d_{n+1} = 0{,}8\, d_n + 0{,}09$.

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel *n*, par $a_n = d_n - 0{,}45$.

4.4.5. Démontrer que la suite (a_n) est une suite géométrique.

4.4.6. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $d_n = 0{,}18 \times 0{,}8^n + 0{,}45$.

4.4.7. Justifier que la suite (d_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

4.4.8. La ministre de l'Europe et des affaires étrangères souhaite que les agents du ministère émettent plus de notes diplomatiques que de messages formels. Le rythme de production des messages actuels dans votre simulation est-il en accord avec cette stratégie ? Justifier votre réponse.

<u>Annexe 1 :</u> Formulaire - rappels mathématiques.

Règles de calcul :

$-a(b-c) = -ab + ac$

$a - (b - c + d) = a - b + c - d$

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$Modulo : 9 \equiv 1 \, mod \, 4 \equiv 1 \, [4]$

$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ $\quad$ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{a}{d} \times \frac{c}{b}$

$k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$ $\quad$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ $\quad$ $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow (ad = bc)$

$a^0 = 1$ (si $a \neq 0$)

$a^{n+1} = a^n \times a$

$a^{n+p} = a^n \times a^p$

$(ab)^n = a^n b^n$

$(a^n)^p = a^{np}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ $\quad$ $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a \leq 0 \end{cases}$

$(|a| = |b|) \Leftrightarrow (a = \pm b)$

si $\{a, b\} \in \mathbb{R}_+$: $\quad$ $\sqrt{a^2} = |a|$

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ $\quad$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$(b^2 = a) \Leftrightarrow (b = \sqrt{a})$ $\quad$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Ensemble de nombres	
$\mathbb{N}$	Entiers naturels
$\mathbb{Z}$	Entiers relatifs
$\mathbb{D}$	Nombres décimaux
$\mathbb{Q}$	Nombres rationnels
$\mathbb{R}$	Nombres réels
$\mathbb{C}$	Nombres complexes
$\mathbb{N}^*$	Entiers naturels non nuls
$\mathbb{Z}_+$	Entiers relatifs positifs
$\mathbb{R}_+^*$	Nombres réels strictement positifs

Suites arithmétiques de raison r *:*

$u_{n+1} = u_n + r$

$u_n = u_0 + nr$

$u_n = u_p + (n-p)r$

$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$

Suites géométrique de raison q *non nulle :*

$u_{n+1} = u_n \times q$

$u_n = u_0 \times q^n$

$u_n = u_p \times q^{n-p}$

$Si\ q \neq 1,\ u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1-q}\right)$

Fonction exponentielle $x \mapsto e^x$:

$e^0 = 1$

$e^1 = e$

$\approx 2{,}718$

pour a et b réels :

$e^{a+b} = e^a \times e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ d'où $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

$(e^a)^b = e^{ab}$

Fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$:

pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$: $(y = \ln x) \Leftrightarrow (x = e^y)$

$\ln 1 = 0$ $\quad$ $\ln e = 1$

pour $a > 0$, $b > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\quad$ $\ln a^x = x \ln a$ et $a^x = e^{x \ln a}$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $\quad$ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

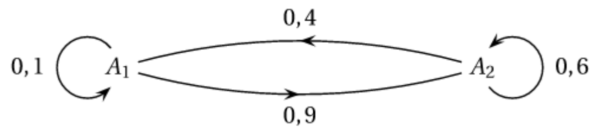
Matrices :

Addition $\quad$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$

Produit de matrices $\quad$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$

Produit par un réel k $\quad$ $k \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$

Graphe probabiliste d'ordre 2 :



Matrice de transition :

$$T = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longleftarrow \text{ origine } A_1 \\ \longleftarrow \text{ origine } A_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{vers} & \text{vers} \\ A_1 & A_2 \end{array} & \end{array}$$

$P_{n+1} = P_n \times M$ et $P_n = P_0 \times M^n$

avec P_n la matrice-ligne à l'étape n

Dérivés et primitives :

Fonctions usuelles		
Dérivée → ← Primitive		Intervalle de validité
k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}^* - \{1\})$
		$\mathbb{R}_+^*$(ou $\mathbb{R}_-^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$)
		$\mathbb{R}_+^*$dans les autres cas
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$ $=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, où $k \in \mathbb{Z}$

Opérations		
Dérivée → ← Primitive		Remarques
ku	ku'	$k \in \mathbb{R}$
$u+v$	$u'+v'$	
uv	$u'v+uv'$	
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	si u ne s'annule pas
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	si v ne s'annule pas
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	si $u>0$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$	si $u>0$
e^u	$u'e^u$	
$\sin u$	$u'\cos u$	
$\cos u$	$-u'\sin u$	
u^{α} $(\alpha \neq 0)$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$	si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, u ne doit pas s'annuler
		si $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$, il faut $u>0$
$v \circ u$	$u' \times (v' \circ u)$	

Statistiques :

Moyenne : $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Écart-type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

Variance : $V(x) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right) - (\bar{x})^2$

Probabilités :

A et B désignent deux événements d'un univers fini Ω

$p(A) = \dfrac{card\ A}{card\ \Omega} = \dfrac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega}$

$p(\emptyset) = 0$ $\qquad p(\Omega) = 1$ $\qquad p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B)$

$P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$ (si $p(A) \neq 0$)

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = p(A) \times P(B)$

Soit une loi de probabilité de X pour laquelle à chaque x_i est associé p_i avec $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$:

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^2 - (E(X))^2$$

Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Équations différentielles :

Équation	$y' = ay$	$y' = ay + b$
Solution	$f(x) = ke^{ax}$	$f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

Calcul intégral :

Si F est une primitive de f sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Interprétation graphique :

si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ correspond à l'aire entre la courbe C_f et l'axe des abscisses.

Propriétés :

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Soit $a \leq b$:

si $f \geq 0$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

si $f \leq g$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Limites :

À l'infini, *une fonction polynôme* a la même limite que son terme de plus haut degré.

À l'infini, *une fonction rationnelle* a la même limite que le quotient simplifié de ses termes de plus haut degré.

Fonctions usuelles :

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ 0 \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } q > 1 \\ 0 \text{ si } -1 < q < 1 \end{cases}$$

Croissances comparées :

si $\alpha > 0$:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$ $\quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$

Taux d'accroissement :

$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$

Attention :

Formes indéterminées

$\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$

(notations non admises)

Loi normale :

Équation de la loi normale $N(\mu, \sigma)$:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

avec μ l'espérance et σ l'écart-type

Centrage et réduction d'une loi normale quelconque $N(\mu, \sigma)$ vers la loi normale centrée réduite Z (avec X, la variable étudiée) :

$$\text{Si } X \sim N(\mu, \sigma) \text{ alors } \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) = Z$$

Exemple : si on souhaite connaître la probabilité de la variable $X = 487$ d'une loi normale quelconque $N(500; 50)$:

$$P(X \leq 487) = P\left(\frac{X-500}{50} \leq \frac{487-500}{50}\right) = P(Z \leq 0{,}26)$$

$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a)$$

$$P(Z < -a) = P(Z > a)$$

Extraction de table de probabilité de la loi normale centrée réduite :

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

La probabilité pour $Z \leq 0{,}26$ est de 0,6026 (croisement entre la ligne 0,2 et la colonne 0,06). Pour les valeurs comprises entre deux croisements ($Z = 0{,}265$ par exemple), on choisira la probabilité de la valeur de Z la plus proche (ici $Z = 0{,}27$).

<u>Annexe 2 :</u> Abaques.

Exercice 1 :

$\alpha = 6 \times 28 + 16 \times 36 + 27 \times 46 + 8 \times 57 = 2\,442$

$\beta = 6 \times 28 + 34 \times 33 + 15 \times 42 + 9 \times 54 = 2\,406$

$\gamma = 45 \times 24 + 16 \times 36 + 15 \times 42 + 8 \times 57 = 2\,742$

$\delta = 45 \times 24 + 34 \times 33 + 27 \times 46 + 9 \times 54 = 3\,930$

$\varphi = 45 \times 24 + 16 \times 36 + 27 \times 46 + 8 \times 57 = 3\,354$

$\omega = 6 \times 28 + 34 \times 33 + 27 \times 46 + 8 \times 57 = 2\,988$

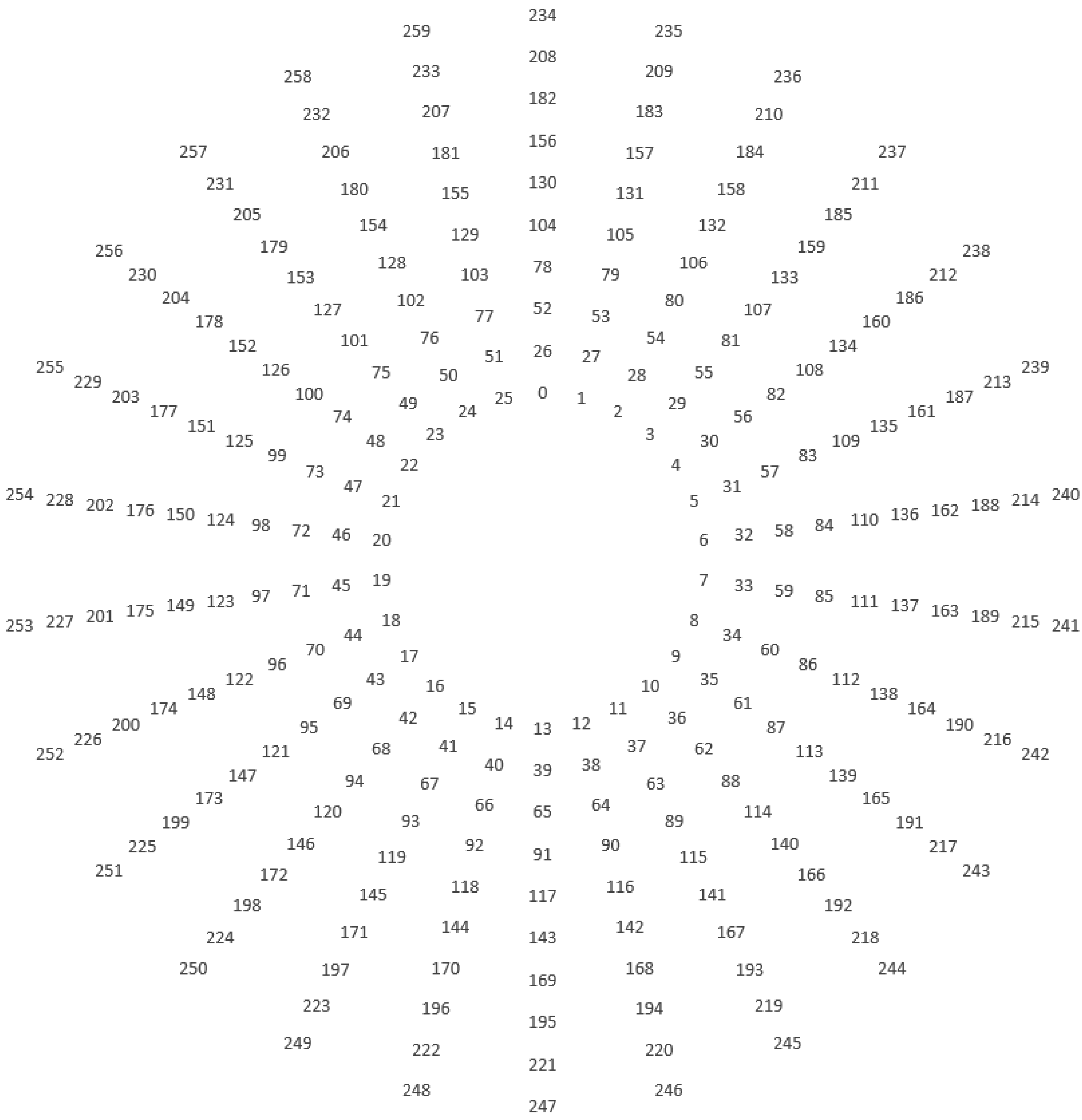
θ	$\frac{\alpha+\delta}{\theta}$	$\frac{\alpha+\varphi}{\theta}$	$\frac{\alpha+\omega}{\theta}$	$\frac{\beta+\delta}{\theta}$	$\frac{\beta+\varphi}{\theta}$	$\frac{\beta+\omega}{\theta}$	$\frac{\gamma+\delta}{\theta}$	$\frac{\gamma+\varphi}{\theta}$	$\frac{\gamma+\omega}{\theta}$
150	42,5	38,6	36,2	42,2	38,4	36,0	44,5	40,6	38,2
152	41,9	38,1	35,7	41,7	37,9	35,5	43,9	40,1	37,7
160	39,8	36,2	33,9	39,6	36,0	33,7	41,7	38,1	35,8
168	37,9	34,5	32,3	37,7	34,3	32,1	39,7	36,3	34,1

Exercice 2 :

a	b	$a \times b$
3 360	57 996	194 866 560
3 361	57 996	194 924 556
3 362	57 996	194 982 552
3 363	57 996	195 040 548
3 364	57 996	195 098 544
3 365	57 996	195 156 540
3 366	57 996	195 214 536
3 367	57 996	195 272 532
3 368	57 996	195 330 528
3 369	57 996	195 388 524

a	b	$a \times b$
5 015	38 900	195 083 500
5 015	38 901	195 088 515
5 015	38 902	195 093 530
5 015	38 903	195 098 545
5 015	38 904	195 103 560
5 015	38 905	195 108 575
5 015	38 906	195 113 590
5 015	38 907	195 118 605
5 015	38 908	195 123 620
5 015	38 909	195 128 635

Exercice 2 :



Représentation graphique des congruences des 260 premiers entiers modulo 26.

Exercice 3 :

$$\ln\ (0{,}4) \approx -0{,}916$$

$$\ln(0{,}95) \approx 0{,}051$$

$$\frac{\ln\frac{2}{5}}{\ln\frac{95}{100}} \approx 17{,}86$$

Valeurs des courbes *C*, *F*, *G* et *H* de $n\ =\ 0$ à $n\ =\ 20$:

n	C	F	G	H
0	500,0	0,0	500,0	500,0
1	25,0	25,0	360,0	475,0
2	451,3	48,8	267,7	451,3
3	71,3	71,3	224,9	428,7
4	407,3	92,7	209,2	407,3
5	113,1	113,1	203,4	386,9
6	367,5	132,5	201,2	367,5
7	150,8	150,8	201,0	349,2
8	331,7	168,3	200,9	331,7
9	184,9	184,9	200,8	315,1
10	299,4	200,6	200,7	299,4
11	215,6	215,6	200,6	284,4
12	270,2	229,8	200,5	270,2
13	243,3	243,3	200,4	256,7
14	243,8	256,2	200,3	243,8
15	268,4	268,4	200,2	231,6
16	220,1	279,9	200,1	220,1
17	290,9	290,9	200,0	209,1
18	198,6	301,4	199,9	198,6
19	311,3	311,3	199,8	188,7
20	179,2	320,8	199,7	179,2

Exercice 4 :

$\frac{1}{13} \approx 0{,}077$ $\frac{2}{13} \approx 0{,}154$ $\frac{3}{13} \approx 0{,}231$ $\frac{4}{13} \approx 0{,}308$ $\frac{5}{13} \approx 0{,}385$ $\frac{6}{13} \approx 0{,}462$ $\frac{7}{13} \approx 0{,}538$

$\frac{8}{13} \approx 0{,}615$ $\frac{9}{13} \approx 0{,}692$ $\frac{10}{13} \approx 0{,}769$ $\frac{11}{13} \approx 0{,}846$ $\frac{12}{13} \approx 0{,}923$ $\frac{13}{13} = 1{,}000$

$\frac{14}{13} \approx 1{,}077$ $\frac{15}{13} \approx 1{,}154$ $\frac{16}{13} \approx 1{,}231$ $\frac{17}{13} \approx 1{,}308$ $\frac{18}{13} \approx 1{,}385$ $\frac{19}{13} \approx 1{,}462$ $\frac{20}{13} \approx 1{,}538$

$\frac{21}{13} \approx 1{,}615$ $\frac{22}{13} \approx 1{,}692$ $\frac{23}{13} \approx 1{,}769$ $\frac{24}{13} \approx 1{,}846$ $\frac{25}{13} \approx 1{,}923$ $\frac{26}{13} = 2{,}000$

α	0,63	0,63	0,37	0,37	0,601	0,601	0,399	0,399	0,897	0,897	0,103	0,103
β	0,37	0,37	0,63	0,63	0,399	0,399	0,601	0,601	0,103	0,103	0,897	0,897
a	0,89	0,89	0,11	0,11	0,89	0,89	0,11	0,11	0,89	0,89	0,11	0,11
b	0,11	0,09	0,89	0,91	0,11	0,09	0,89	0,91	0,11	0,09	0,89	0,91
c	0,09	0,11	0,91	0,89	0,09	0,11	0,91	0,89	0,09	0,11	0,91	0,89
d	0,91	0,91	0,09	0,09	0,91	0,91	0,09	0,09	0,91	0,91	0,09	0,09
$\alpha \cdot a + \beta \cdot a$	0,890	0,890	0,110	0,110	0,8900	0,8900	0,1100	0,1100	0,8900	0,8900	0,1100	0,1100
$\alpha \cdot a + \beta \cdot b$	0,601	0,594	0,601	0,614	0,5788	0,5708	0,5788	0,5908	0,8097	0,8076	0,8097	0,8276
$\alpha \cdot a + \beta \cdot c$	0,594	0,601	0,614	0,601	0,5708	0,5788	0,5908	0,5788	0,8076	0,8097	0,8276	0,8097
$\alpha \cdot a + \beta \cdot d$	0,897	0,897	0,097	0,097	0,8980	0,8980	0,0980	0,0980	0,8921	0,8921	0,0921	0,0921
$\alpha \cdot b + \beta \cdot a$	0,399	0,386	0,399	0,406	0,4212	0,4092	0,4212	0,4292	0,1903	0,1724	0,1903	0,1924
$\alpha \cdot b + \beta \cdot b$	0,110	0,090	0,890	0,910	0,1100	0,0900	0,8900	0,9100	0,1100	0,0900	0,8900	0,9100
$\alpha \cdot b + \beta \cdot c$	0,103	0,097	0,903	0,897	0,1020	0,0980	0,9020	0,8980	0,1079	0,0921	0,9079	0,8921
$\alpha \cdot b + \beta \cdot d$	0,406	0,393	0,386	0,393	0,4292	0,4172	0,4092	0,4172	0,1924	0,1745	0,1724	0,1745
$\alpha \cdot c + \beta \cdot a$	0,386	0,399	0,406	0,399	0,4092	0,4212	0,4292	0,4212	0,1724	0,1903	0,1924	0,1903
$\alpha \cdot c + \beta \cdot b$	0,097	0,103	0,897	0,903	0,0980	0,1020	0,8980	0,9020	0,0921	0,1079	0,8921	0,9079
$\alpha \cdot c + \beta \cdot c$	0,090	0,110	0,910	0,890	0,0900	0,1100	0,9100	0,8900	0,0900	0,1100	0,9100	0,8900
$\alpha \cdot c + \beta \cdot d$	0,393	0,406	0,393	0,386	0,4172	0,4292	0,4172	0,4092	0,1745	0,1924	0,1745	0,1724
$\alpha \cdot d + \beta \cdot a$	0,903	0,903	0,103	0,103	0,9020	0,9020	0,1020	0,1020	0,9079	0,9079	0,1079	0,1079
$\alpha \cdot d + \beta \cdot b$	0,614	0,607	0,594	0,607	0,5908	0,5828	0,5708	0,5828	0,8276	0,8255	0,8076	0,8255
$\alpha \cdot d + \beta \cdot c$	0,607	0,614	0,607	0,594	0,5828	0,5908	0,5828	0,5708	0,8255	0,8276	0,8255	0,8076
$\alpha \cdot d + \beta \cdot d$	0,910	0,910	0,090	0,090	0,9100	0,9100	0,0900	0,0900	0,9100	0,9100	0,0900	0,0900

Exercice 4 :

x	$0{,}013 \cdot e^{x}$	$0{,}013 \cdot e^{-x}$	x	$0{,}013 \cdot e^{x}$	$0{,}013 \cdot e^{-x}$	x	$0{,}013 \cdot e^{x}$	$0{,}013 \cdot e^{-x}$	x	$0{,}013 \cdot e^{x}$	$0{,}013 \cdot e^{-x}$
1	0,035	$4{,}78 \cdot 10^{-3}$	6	5,245	$3{,}22 \cdot 10^{-5}$	11	778,36	$2{,}17 \cdot 10^{-7}$	16	115 519,44	$1{,}46 \cdot 10^{-9}$
2	0,096	$1{,}76 \cdot 10^{-3}$	7	14,26	$1{,}19 \cdot 10^{-5}$	12	2 115,81	$7{,}99 \cdot 10^{-8}$	17	314 014,39	$5{,}38 \cdot 10^{-10}$
3	0,261	$6{,}47 \cdot 10^{-4}$	8	38,75	$4{,}36 \cdot 10^{-6}$	13	5 751,37	$2{,}94 \cdot 10^{-8}$	18	853 579,60	$1{,}98 \cdot 10^{-10}$
4	0,710	$2{,}38 \cdot 10^{-4}$	9	105,34	$1{,}60 \cdot 10^{-6}$	14	15 633,86	$1{,}08 \cdot 10^{-8}$	19	2 320 269,91	$7{,}28 \cdot 10^{-11}$
5	1,929	$8{,}76 \cdot 10^{-5}$	10	286,34	$5{,}90 \cdot 10^{-7}$	15	42 497,23	$3{,}98 \cdot 10^{-9}$	20	6 307 147,54	$2{,}68 \cdot 10^{-11}$

α	0,594	0,594	0,406	0,406	0,614	0,614	0,386	0,386	0,607	0,607	0,393	0,393
β	0,406	0,406	0,594	0,594	0,386	0,386	0,614	0,614	0,393	0,393	0,607	0,607
a	0,89	0,89	0,11	0,11	0,89	0,89	0,11	0,11	0,89	0,89	0,11	0,11
b	0,11	0,09	0,89	0,91	0,11	0,09	0,89	0,91	0,11	0,09	0,89	0,91
c	0,09	0,11	0,91	0,89	0,09	0,11	0,91	0,89	0,09	0,11	0,91	0,89
d	0,91	0,91	0,09	0,09	0,91	0,91	0,09	0,09	0,91	0,91	0,09	0,09
$\alpha \cdot a + \beta \cdot a$	0,8900	0,8900	0,1100	0,1100	0,8900	0,8900	0,1100	0,1100	0,8900	0,8900	0,1100	0,1100
$\alpha \cdot a + \beta \cdot b$	0,5733	0,5652	0,5733	0,5852	0,5889	0,5812	0,5889	0,6012	0,5835	0,5756	0,5835	0,5956
$\alpha \cdot a + \beta \cdot c$	0,5652	0,5733	0,5852	0,5733	0,5812	0,5889	0,6012	0,5889	0,5756	0,5835	0,5956	0,5835
$\alpha \cdot a + \beta \cdot d$	0,8981	0,8981	0,0981	0,0981	0,8977	0,8977	0,0977	0,0977	0,8979	0,8979	0,0979	0,0979
$\alpha \cdot b + \beta \cdot a$	0,4267	0,4148	0,4267	0,4348	0,4111	0,3988	0,4111	0,4188	0,4165	0,4044	0,4165	0,4244
$\alpha \cdot b + \beta \cdot b$	0,1100	0,0900	0,8900	0,9100	0,1100	0,0900	0,8900	0,9100	0,1100	0,0900	0,8900	0,9100
$\alpha \cdot b + \beta \cdot c$	0,1019	0,0981	0,9019	0,8981	0,1023	0,0977	0,9023	0,8977	0,1021	0,0979	0,9021	0,8979
$\alpha \cdot b + \beta \cdot d$	0,4348	0,4229	0,4148	0,4229	0,4188	0,4065	0,3988	0,4065	0,4244	0,4123	0,4044	0,4123
$\alpha \cdot c + \beta \cdot a$	0,4148	0,4267	0,4348	0,4267	0,3988	0,4111	0,4188	0,4111	0,4044	0,4165	0,4244	0,4165
$\alpha \cdot c + \beta \cdot b$	0,0981	0,1019	0,8981	0,9019	0,0977	0,1023	0,8977	0,9023	0,0979	0,1021	0,8979	0,9021
$\alpha \cdot c + \beta \cdot c$	0,0900	0,1100	0,9100	0,8900	0,0900	0,1100	0,9100	0,8900	0,0900	0,1100	0,9100	0,8900
$\alpha \cdot c + \beta \cdot d$	0,4229	0,4348	0,4229	0,4148	0,4065	0,4188	0,4065	0,3988	0,4123	0,4244	0,4123	0,4044
$\alpha \cdot d + \beta \cdot a$	0,9019	0,9019	0,1019	0,1019	0,9023	0,9023	0,1023	0,1023	0,9021	0,9021	0,1021	0,1021
$\alpha \cdot d + \beta \cdot b$	0,5852	0,5771	0,5652	0,5771	0,6012	0,5935	0,5812	0,5935	0,5956	0,5877	0,5756	0,5877
$\alpha \cdot d + \beta \cdot c$	0,5771	0,5852	0,5771	0,5652	0,5935	0,6012	0,5935	0,5812	0,5877	0,5956	0,5877	0,5756
$\alpha \cdot d + \beta \cdot d$	0,9100	0,9100	0,0900	0,0900	0,9100	0,9100	0,0900	0,0900	0,9100	0,9100	0,0900	0,0900