Intitulé de l'épreuve : le 20 février 2019 - Mathématiques

Nombre de copies :

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles dans le bon sens.

Exercice 3

1°)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

2°) Calculons $A + 2I$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A^2 \quad \text{(cf. 1°)}$$

On a donc $\underline{A^2 = A + 2I}$

[redacted]

3°) a) On a $A^2 = A + 2I$ (E)

Multiplions (E) par A :

$A^3 = A^2 + 2A$

$A^3 = (A + 2I) + 2A$ d'après (E)

$A^3 = 3A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) On a $A^2 = A + 2I$

donc $2I = A^2 - A = A(A - I)$

donc $I = \frac{1}{2} A(A - I)$

Soit $\frac{1}{2} A(A - I) = I$

c) D'après b), on a :

$A * \left[\frac{1}{2}(A - I)\right] = I$

A est donc inversible, et

l'inverse de A, A^{-1} est donc $\frac{1}{2}(A - I)$

$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 4

1°) $\begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$

donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\underline{A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

2°) . Pour $n = 0$, on a :

$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ d'après 1°).

. Supposons qu'au rang $n \geq 1$, on ait

$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

Alors comme $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ d'après 1°)

on a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A * A^n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ d'après l'hypothèse de récurrence

et donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$: l'hypothèse est vraie au rang $n+1$.

. D'après le principe de récurrence, on a donc : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

3°) (a) On cherche J telle que $A = 5I + J$

Donc $J = A - 5I = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

J^2 est la matrice nulle.

$A^2 = (5I + J)^2 = 25I + 10J$

(car $I^2 = I$ et $\begin{cases} I * J = J \\ J * I = J \end{cases}$ et $J^2 = 0$)

$$A^2 = 10J + 25I = \begin{pmatrix} 35 & -10 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

4°) • Pour $n = 1$.

On a (3°(a)) $A = 5I + J$
$= J + 5I$

Soit $A^1 = (1 * 5^0)J + 5^1 I$

• Supposons que $A^n = n5^{n-1}J + 5^n I$ pour un n donné supérieur à 1.

Calculons A^{n+1}. $A^{n+1} = A * A^n$

$A^{n+1} = (5I + J) * (n5^{n-1}J + 5^n I)$

$= (5 \times n5^{n-1})J + 5 \times 5^n I + n5^{n-1}J^2 + 5^n J$

(car $I \times J = J \times I = J$ et $I^2 = I$)

N° 4/11.

Intitulé de l'épreuve : le 20 février 2019 - Mathématiques

Nombre de copies :

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles dans le bon sens.

Comme $J^2 = 0$, on obtient :

$$A^{n+1} = n5^n J + 5^{n+1} I + 5^n J$$

donc $A^{n+1} = (n+1)5^n J + 5^{n+1} I$

La formule est valable au rang $n+1$ si elle l'est au rang n ($n \geq 1$)

. D'après le principe de récurrence on a donc :

$$\underline{A^{n} = n5^{n-1} J + 5^n I \quad \forall n \geq 1}$$

5°) $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ d'après 2°) $\forall n \geq 1$

donc $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = (n\,5^{n-1} J + 5^n I) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n5^{n-1} + 5^n & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & -n5^{n-1} + 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_n = -n5^{n-1} & \forall n \geq 0 \\ v_n = -n5^{n-1} + 5^n \end{cases}$$

[redacted]

Exercice 1

1°) $5u_1 = 2u_0 + 21 = 2\times 10 + 21 = 41$

$\cancel{5u_2 = 2u_1 + 21 = 2\times 41 + 21 = 103}$

donc $u_1 = \frac{41}{5}$

$5u_2 = 2u_1 + 21 = \frac{82}{5} + \frac{105}{5} = \frac{187}{5}$

donc $u_2 = \frac{187}{25}$

2°) • On a $u_0 = 10 \geq 7$

• Supposons, pour $n \geq 0$ donné, qu'on ait $u_n \geq 7$

alors $2u_n + 21 \geq 35$

$5u_{n+1} \geq 35$

donc $u_{n+1} \geq \frac{35}{5}$

$u_{n+1} \geq 7$

• D'après le principe de récurrence, on a bien $u_n \geq 7, \forall n \geq 0$

3°) Etudions $5(u_{n+1} - u_n)$

$5(u_{n+1} - u_n) = 5u_{n+1} - 5u_n$

$= 2u_n + 21 - 5u_n$

$= -3u_n + 21$

Or $u_n \geq 7 \;\; \forall n \geq 0$

N° 6/11.

donc : $3u_n \geq 21$

$0 \geq -3u_n + 21$

Donc : $5(u_{n+1} - u_n) \leq 0 \quad \forall n \geq 0$

Donc $u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \geq 0$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4°) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc convergente.

Notons ℓ sa limite

On a $5u_{n+1} = 2u_n + 21$

En passant à la limite, on obtient :

$5\ell = 2\ell + 21$

Soit $3\ell = 21$

$\ell = 7$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite convergente, de limite $\ell = 7$.

5°) ⓐ $v_n = u_n - 7$. Calculons v_{n+1}.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 7$

$5v_{n+1} = 5u_{n+1} - 35 = 2u_n + 21 - 35$

$5v_{n+1} = 2(v_n + 7) - 14$ (car $u_n = v_n + 7$)

$= 2v_n$

$v_{n+1} = \frac{2}{5} v_n \quad \forall n \geq 0$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de 1er terme 3.

ⓑ D'après ⓐ $V_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n \quad n \geq 0$

6°) ⓐ $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$

$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de 1er terme 3

donc $S_n = 3\,\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)} = 5 - \dfrac{2^{n+1}}{5^n}$

ⓑ $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (V_k + 7)$

$= \sum_{k=0}^{n} V_k + 7n$

$T_n = 3\,\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}} + 7n = 5 - \dfrac{2^{n+1}}{5^n} + 7n$

7°) • $-1 < \left(\frac{2}{5}\right) < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = 3\,\dfrac{1}{1-\frac{2}{5}} = 5$

• $\lim_{n\to+\infty} S_n = 5$ et $\lim_{n\to+\infty} 7n = +\infty$

Donc $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$

Intitulé de l'épreuve : le 20 février 2019 - Mathématiques

Nombre de copies :

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles dans le bon sens.

Exercice 2

1°)

(a) . Il y a cinq boules à tirer deux par deux, donc une combinaison de deux boules parmi 5 soit $\frac{5(5-1)}{2}$ combinaisons possibles.

il y a 10 tirages de deux boules possibles

. Pour réaliser V, il faut tirer les deux boules vertes à la fois, il n'y a qu'un seul tirage possible

donc $P(V) = \frac{1}{10}$

. Pour réaliser J, il faut tirer deux boules jaunes sur trois, soit trois possibilités (combinaison de deux parmi 3 : $\frac{3 \times 2}{2} = 3$)

donc $P(J) = \frac{3}{10}$

[redacted]

(b) • Si V est réalisé, le joueur est remboursé s'il n'a pas de gains, soit $P_V(R) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

$$\underline{P_V(R) = \frac{5}{8}}$$

• Comme $P(V) \neq 0$, on a $P_V(R) = \frac{P(R \cap V)}{P(V)}$

donc $P(R \cap V) = P_V(R) \times P(V) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{10}$

$$\underline{P(R \cap V) = \frac{1}{16}}$$

(c) le joueur est remboursé s'il tire deux boules jaunes (J) ou s'il tire deux boules vertes et ne gagne rien sur la roue ($R \cap V$)

J et V étant incompatibles, on obtient :

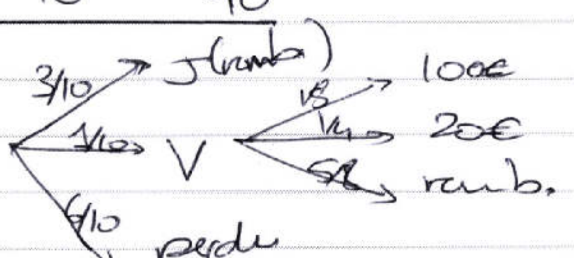
$$P(R) = P(J) + P(R \cap V)$$
$$= \frac{3}{10} + \frac{1}{16} = \frac{24}{80} + \frac{5}{80}$$

$$\underline{P(R) = \frac{29}{80}}$$

(d) $P(100€) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{80}$

$P(20€) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{40}$

Arbre de décision :



2°)

(a) X peut prendre les valeurs suivantes :

- $-m$ (perte sèche)
- 0 (remboursement)
- $20-m$ (gain de 20 € sur la roue)
- $100-m$ (gain de 100 € " " ")

(b) D'après le 1°)

$$P(X=-m) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=0) = P(R) = \frac{29}{80}$$

$$P(X=20-m) = P(20€) = \frac{1}{40}$$

$$P(X=100-m) = P(100€) = \frac{1}{80}$$

(c) $E(X) = \frac{3}{5}(-m) + \frac{29}{80}(0) + \frac{1}{40}(20-m) + \frac{1}{80}(100-m)$

$$= \frac{-48m + 40 - 2m + 100 - m}{80}$$

$$E(X) = \frac{140-51m}{80}$$

(d) Il faut que l'espérance de X soit négative pour que l'organisateur gagne (que le joueur perde)

D'après (c) $E(X) = \frac{140-51m}{80}$

$E(X) \leq 0 \iff \frac{140-51m}{80} \leq 0 \iff 51m \geq 140$

m doit être au moins égal à $\frac{140}{51}$

N° ../..

N°

.../...