

Intitulé de l'épreuve : 20/02/2019 - MATHÉMATIQUES

Nombre de copies : 2 (8 pages)

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles dans le bon sens.

Exercice 1

$$1. \quad 5u_1 = 2u_0 + 21 \\ = 41$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{41}{5}}$$

$$5u_2 = \frac{82}{5} + \frac{105}{5} \\ \Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{187}{25}}$$

$$2. \quad u_0 = 10 \text{ donc } u_0 \geq 7$$

On montre par récurrence que $u_n \geq 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Admettons que pour n quelconque $u_n \geq 7$

$$5u_{n+1} = 2u_n + 21 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{21}{5}$$

$$\text{Or } u_n \geq 7 \Rightarrow \frac{2}{5}u_n \geq \frac{14}{5} \quad (\text{car } \frac{2}{5} > 0)$$

$$\text{d'où } \frac{2}{5}u_n + \frac{21}{5} \geq \frac{35}{5}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{u_{n+1} \geq 7}$$

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 7$

N°

1.18

$$\begin{aligned}
 5. \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n + 21}{5} - u_n \\
 &= \frac{21}{5} - \frac{3}{5}u_n
 \end{aligned}$$

$$\text{or } u_n \geq 7 \text{ then } -\frac{3}{5}u_n \leq -\frac{21}{5}$$

Thus $\boxed{u_{n+1} - u_n \leq 0}$ donc (u_n) est décroissante.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 7$ donc (u_n) est minorée.
 u_n est également décroissante donc elle est convergente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7.$$

$$5. \quad v_n = u_n - 7$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 7 \\ &= \frac{2}{5} u_n + \frac{21}{5} - \frac{35}{5} \\ &= \frac{2}{5} u_n - \frac{14}{5} \\ &= \frac{2}{5} (u_n - 7) \\ &= \frac{2}{5} v_n \end{aligned}$$

Alors (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

$$v_0 = u_0 - 7 = 3$$

$$\boxed{v_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad S_n &= \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + \dots + v_n \\ &= v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} \\ &= 3 \times \frac{5}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) \\ &= 5 \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cancel{S_n} \quad S_n &= \sum_{k=0}^n v_k \\ &= \sum_{k=0}^n (u_k - 7) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_n = 5 \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) + 7n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 5$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$$

Exercice 2:

de boules

1. a) 10 combinaisons V sont possibles $\left(\binom{2}{5} \right)$.

Si on considère B_1 et B_2 des boules vertes
et B_3, B_4, B_5 les boules jaunes

on a seulement 1 combinaison (B_1, B_2) pour sous-ensemble
 V et 3 possibilités pour sous-ensemble J : $(B_3, B_4), (B_3, B_5)$
ou (B_4, B_5)

$$\text{donc } \left| \begin{array}{l} P(V) = \frac{1}{10} \text{ et } P(J) = \frac{3}{10} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \text{b. } P_V(R) &= 1 - \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} P(R \cap V) = P(V) \times P_V(R) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{8} \\ = \frac{1}{16} \end{array} \right|$$

c. $P(R) = P(R \cap V) + P(J)$ (par définition puisqu'il est
remboursé s'il obtient deux
boules jaunes)

$$= \frac{1}{16} + \frac{3}{10}$$

$$= \frac{58}{160}$$

$$\left| = \frac{29}{80} \right|$$

Intitulé de l'épreuve : 20/02/2019 - MATHÉMATIQUES

Nombre de copies : 2 (8 pages)

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles dans le bon sens.

Exercice 2 (suite)

d) la probabilité de gagner les 100 euros de la roue

$$\text{est de : } \begin{cases} P = \frac{1}{8} \times P(V) \\ = \frac{1}{80} \end{cases}$$

De même, la probabilité de gagner les 20 euros est de $\frac{1}{40}$.

2.

- a) $X = -m$ (le joueur perd)
 $X = 0$ (le joueur est remboursé de sa mise)
 $X = 20 - m$ (gagne 20 euros)
 $X = 100 - m$ (100 euros)

b)

$$P(X = -m) = 1 - P(V) - P(J) = \frac{6}{10}$$

$$P(X = 0) = \frac{29}{80}$$

$$P(X = 20 - m) = \frac{1}{40}$$

$$P(X = 100 - m) = \frac{1}{80}$$

N°

5.18.

$$c. t(x) = \frac{6}{10}x - m + \frac{1}{40}x(20 - m) + \frac{1}{80}(100 - m)$$

$$= \frac{48m - 2m + 60 + 100}{80}$$

$$= \frac{140 - 51m}{80}$$

d. il faut choisir m tel que $t(x) \geq 0$

$$\text{d'où } \underline{m \geq 3 \text{ euros}}$$

Exercice 3

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left| \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \quad = A + 2I \right.$$

$$\begin{aligned}
 3. a) \quad A^3 &= A \cdot A^2 \\
 &= A(A^2 + 2 \cdot I) \\
 &= A^3 + 2 \cdot A \\
 &= A + 2I + 2A \\
 &= \underline{3A + 2 \cdot I}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \frac{1}{2} A(A-I) &= \frac{1}{2} [A^2 - A] \\
 &= \frac{1}{2} [A + 2I - A] \\
 &= I.
 \end{aligned}$$

c. La matrice $\frac{1}{2}(A-I)$ est l'inverse de A .

Exercice 4

$$1. \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \underline{A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$2. \text{ pour } n=1 \text{ on a bien } \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Supposons que pour } n \text{ quelconque } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{alors } \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= A \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \cdot A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\
 &= A^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{ainsi } \underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
 3. a) \text{ on remarque que } A &= \begin{pmatrix} 5+1 & -1 \\ 1 & 5-1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$A = 5I + J \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -10 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 35 & -10 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}}$$

4. Pour $n=1$, on a $A = 1 \times 5^0 J + 5^1 I$
 $= J + 5I$

Supposons que pour n quelconque $A^n = n \times 5^{n-1} J + 5^n I$

$$A^{n+1} = n \cdot 5^{n-1} A \cdot J + 5^n A$$

$$= n \cdot 5^{n-1} (5I + J) \cdot J + 5^n A$$

$$= n \cdot 5^{n-1} (5I \cdot J + J^2) + 5^n (5I + J) \quad (\text{or } J^2 \text{ est la matrice nulle})$$

$$= n \cdot 5^n J + 5^n J + 5^{n+1} I$$

$$= (n+1) 5^n J + 5^{n+1} I \quad \text{Le résultat est donc vérifié au rang } n+1.$$

avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = n \times 5^{n-1} J + 5^n I$ $A^n = \begin{pmatrix} 5^n + n \cdot 5^{n-1} & -n \cdot 5^{n-1} \\ n \cdot 5^{n-1} & 5^n - n \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ d'où $\begin{cases} u_n = 5^{n-1} (n+5) u_0 - n \times 5^{n-1} v_0 \\ v_n = n \times 5^{n-1} u_0 + 5^{n-1} (5-n) v_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} u_n = -n \times 5^{n-1} \\ v_n = 5^{n-1} (5-n) \end{cases}$$