DIRECTION GENERALE DE L'ADMINISTRATION
ET DE LA MODERNISATION

DIRECTION DES RESSOURCES HUMAINES

Sous-direction de la Formation et des Concours

Bureau des concours et examens professionnels
RH4B

CONCOURS INTERNE ET EXTERNE POUR L'ACCES A L'EMPLOI D'ATTACHE DES SYSTEMES D'INFORMATION ET DE COMMUNICATION AU TITRE DE L'ANNEE 2019

EPREUVES ECRITES D'ADMISSIBILITE – 20 ET 21 FEVRIER 2019

MATHEMATIQUES

Composition de mathématiques appliquées à l'informatique pouvant comporter des exercices, des questions sur le programme et des problèmes à résoudre.

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

SUJET

Voir pages suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée

Ce dossier comporte 4 pages (page de garde non comprise).

1 Exercice 1 - 6 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier n,
$5u_{n+1} = 2u_n + 21$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démonter que, pour tout entier n, $u_n \geq 7$.

3. Démonter que (u_n) est une suite décroissante.

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5. On pose, pour tout entier n, $v_n = u_n - 7$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

6. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_o + v_1 + ... + v_n$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

   a. Déterminer l'expression de S_n , puis de T_n, en fonction de n.

7. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$

2 Exercice 2 - 6 points

Une association organise une loterie pour laquelle une participation$m$ exprimée en euros est demandée.
Un joueur doit tirer simultanément au hasard deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes. Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.
Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\frac{1}{8}$ de la roue, le gain est de 100 euros ;

- sur $\frac{1}{4}$ de la roue, le gain est de 20 euros ;

- sur le reste de la roue, le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement " le joueur a obtenu 2 boules vertes ".
On appelle J l'évènement " le joueur a obtenu 2 boules jaunes ".
On appelle R l'évènement " le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ".

1. Quelques calculs

   a) Calculer les probabilités $P(V)$ et $P(J)$ des évènements respectifs V et J.

   b) On note $P_V(R)$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes.

   Déterminer $P_V(R)$ puis $P(R \cap V)$.

   c) Calculer $P(R)$.

   d) Calculer la probabilité de gagner les 100 euros de la roue, puis la probabilité de gagner les 20 euros de la roue.

2. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur, c'est à dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.

a) Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c) Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X) = \frac{140-51m}{80}$.

d) L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euro. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

3 Exercice 3 - 3,5 points

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité de l'ensemble des matrices d'ordre 3.
On rappelle que pour démontrer qu'une matrice P d'ordre 3 est inversible, il suffit de démontrer qu'il existe une matrice Q d'ordre 3 telle que $P * Q = I$.
Q est appelée alors matrice inverse de P.
On note dans l'exercice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2.

2. Démontrer l'égalité (E) suivante $A^2 = A + 2I$.

3. Utiliser l'égalité (E) pour :

a) Calculer A^3.

b) Démontrer que $\frac{1}{2}A(A - I) = I$.

c) En déduire que A est inversible et déterminer sa matrice inverse A^{-1}.

4 Exercice 4 - 4,5 points

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n naturel par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases} et \begin{cases} u_0 = 0 \\ v0 = 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice A telle que pour tout entier naturel n, on ait :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

2. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n * \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

3.

   a) Déterminer la matrice J telle que $A = 5I + J$ où I est la matrice identité d'ordre 2.

   b) Calculer J^2 puis A^2.

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a:

$$A^n = n * 5^{n-1}J + 5^nI.$$

5. Exprimer (u_n) et (v_n) en fonction de n.