N° 1,2

Épreuve de Mathématiques

Exercice 1:

Soit h le nombre de collegues hommes et f le nombre de collegues femmes.
Chaque homme ayant deux fois plus de collegues femmes que hommes, on a :
- $f = 2(h-1)$

Les formés représentent la moitié des salariés ($= \frac{1}{2}(h+f)$), mais aussi huit hommes et la moitié des femmes (soit $8 + \frac{1}{2}f$).
- $8 + \frac{1}{2}f = \frac{1}{2}(h+f)$

soit $\underline{h = 16}$

Reporté dans la premiere affirmation, $\underline{f = 30}$.

Donc : A - FAUX, il y a 16 salariés hommes.
B - VRAI, 8 sur les 16 ont suivi la formation
C - VRAI, il y a 23 personnes de formées au total

Exercice 2:

1a. M appartient à la droite passant par $A(-i)$ et $E(-iz)$.
Il s'agit de l'ensemble des points de la droite $x = 0$.

1b. Pour $M(x+iy)$, M, P, Q forment un triangle équilatéral si
$|MP|^2 = |PQ|^2 = |QM|^2$
soit

D'où le système :

$$\begin{cases} (z^2-x)^2+y^2=(z^3-z^2)^2 \\ (z^2-x)^2+y^2=(z^3-x)^2+y^2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} y^2=(z^3-z^2)^2-(z^2-x)^2 \\ (z^2-x)^2=(z^3-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2=(z^3-z^2+z^2-x)(z^3-z^2-z^2+x) \\ \text{et } z^2=z^3 \text{ ou } x=\tfrac{1}{2}(z^2+z^3) \end{cases}$$

Si $z=x+iy$, $z^2=x^2-y^2+2xyi$

$$z^3=\left[x(x^2-y^2)-2xy^2\right]+\left[2x^2y+y(x^2-y^2)\right]i$$

$$\begin{cases} \left[(x^2-y^2)^2-x\right]^2+\left[(2xy)^2+y^2\right]^2=\left[(1-x)(x^2-y^2)-2xy^2\right]^2+\left[2x^2y+yx^2-y^2+2y\right. \\ \left[x^2-y^2-x\right]^2+\left[(2xy)^2+y\right]^2=\left[(x(x^2-y^2\right. \end{cases}$$

Problème :

A 1. Pierre se déplace forcement suivant l'un des trois vecteurs $(1,0)$; $(1,1)$ et $(1,-1)$

Puisque ses coordonnées sont (x,y) au bout de x deplacements ...

Ses coordonnées au bout de x deplacements sont donc (x,y).

avec $y = a(\times 1) + b(\times 0) + c\times(-1) = a - c$ avec $a + b + c = x$

2. Pierre avance obligatoirement, il ne peut reculer donc $(-1;-1)$ n'est pas possible

De même, $(0;1)$ n'est pas possible puisqu'à x déplacement, son absice est x, donc il est à son point de départ à savoir $(0;0)$

. La position $(2;2)$ est possible avec $(a=2, b=0, c=0)$.

. De même pour la position $(10;-1)$ avec $(a=c-1, b=11-2c, c)$

donc par exemple $(2,5,3)$ ou $(1,7,2)$ pour pas qu'il ne tombe

B 1/ $a_n \to a_{n+1}$ $\quad a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n$

$b_n \to b_{n+1}$ $\quad b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n + \frac{1}{3} c_n$

$c_n \to c_{n+1}$ $\quad c_{n+1} = \frac{1}{3} b_n + \frac{1}{3} c_n$.

2/ $a_0 = 0 \quad b_0 = 1 \quad c_0 = 0$

$a_1 = 1/3 \quad b_1 = 1/3 \quad c_1 = 1/3$.

$a_2 = \frac{2}{9} \quad b_2 = \frac{3}{9} \quad c_2 = \frac{2}{9}$

La probabilité que Pierre soit toujours sur le tapis après 2 déplacements est de $\boxed{7/9}$.

3/ $a_3 = \frac{5}{27} \quad b_3 = \frac{7}{27} \quad c_3 = \frac{5}{27}$

La probabilité qu'il tombe à son $3^{\text{ème}}$ pas est de $\frac{1}{3}(a_2+c_2)$ soit $\boxed{\frac{4}{27}}$.

La probabilité qu'il soit déjà tombé après 3 pas est de $\frac{10}{27}$

4/ $a_4 = \frac{4}{27} \quad b_4 = \frac{17}{81} \quad c_4 = \frac{4}{27}$

La probabilité qu'il soit encore sur le tapis est de $\frac{41}{81}$, donc $\boxed{\frac{40}{81}}$ qu'il ne reussisse pas à faire 4 pas.

5. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$A^{-2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

6. La présence de Pierre sur le tapis est la somme $a_{10}+b_{10}+c_{10}$ soit 0,137497, soit plus d'une chance sur 10.

Le candidat ne doit pas signer cette composition.

N°2 / 2

Epreuve de Mathématiques

Exercice 3.

$$J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x)^n . \sin x \, dx.$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x)^n . \sin x \, dx.$$

$$= \int_1^0 (1 - t^2)^n . (-dt) \quad \text{avec } t = \cos x.$$

$$= \int_0^1 (1-t^2)^n dt$$

2. $I_0 = \int_{-1}^{1} dt = 2$

3a. $$I_{n+1} - I_n = -\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt + \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n . (1-t^2) dt.$$

$$= \int_{-1}^{1} -t^2 (1-t^2)^n dt$$

En intégrant par parties avec $u = t$ et $v' = t . (1-t^2)^n$

soit $u' = 1$ et $v = -\frac{1}{2} \frac{1}{n+1} (1-t^2)^{n+1}$

$$I_{n+1} - I_n = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{n+1} t (1-t^2)^{n+1} \right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \frac{1}{n+1} (1-t^2)^{n+1} dt.$$

$$\boxed{I_{n+1} - I_n = \frac{1}{2(n+1)} . I_{n+1}}$$

$$I_n = \frac{2n+1}{2n+2} I_{n+1}.$$

On a donc $I_n = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{n+1} I_0 = 2 \times \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{n+1}$ $n \geq 1$.